EXERCICE 2 7 points

Principaux domaines abordés : suites ; fonctions, fonction exponentielle.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 \,\mathrm{e}^{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Calculer u_1 puis u_2.
   On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3}.
   b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

   On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de `0` à `n -1`.

```
def  fonc (n):
     u =- 1
     for i in range(n) :
       u=u**3*exp(u)
     return u
```

   Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc (2)` arrondie à 10^{-3}.

2. **a.** Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 \,\mathrm{e}^{x}(x+3)$.
   b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0 ↘	$-27\,\mathrm{e}^{-3}$	↗ $+\infty$

   c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

   d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   e. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
   Déterminer ℓ. (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\dfrac{1}{2}$).