

**EXERCICE 2****5 points**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , où  $n$  désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors  $a_0 = 1\,700$  et  $b_0 = 1\,300$ .

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer une relation liant  $a_n$  et  $b_n$ .
3. Montrer que la suite  $(a_n)$  vérifie la relation suivante pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700.$$

- b. En déduire que la suite  $(a_n)$  converge.
5. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = a_n - 1\,200$ .
  - a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.
  - b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200$ .
6. a. Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ .  
b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7. a. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de  $n$  à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :  
    n = 0  
    A = 1700  
    while ... :  
        n=n+1  
        A = ...  
    return
```

- b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.