EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait $10\,560$ panneaux solaires. On observe, chaque année, que $2\ \%$ des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1.

a) Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

b) On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à $12\,000$. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c) Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n = 0
while ............. :
    u = ............
    n = ............
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq 12\,500$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$, pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}98$ dont on précisera le premier terme.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c) En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.