Exercice 2 (5 points)

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.

Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.

Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.

Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y - 0,5 \qquad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y(1 - 0,00125y)$$

On note f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \dfrac{800}{1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$	$f(x) = \dfrac{800}{1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$
2	$f'(x) :=$ Dérivée $(f(x))$	$f'(x) = \dfrac{600\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^2}$
3	$f''(x) :=$ Dérivée $(\ f'(x)\ )$	$f''(x) = \dfrac{30\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^3}\left(15\,\mathrm{e}^{-0,05x} - 1\right)$
4	Résoudre $(\ 15\,\mathrm{e}^{-0,05x} - 1 \geqslant 0\ )$	$x \leqslant 20\ln(15)$

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0{,}05 f(x)(1 - 0{,}00125 f(x))$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f, estimer l'effectif de cette population en 2050. Arrondir le résultat à l'unité.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe C ? Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.

4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

5. Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f'.

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C.

   b. La direction de la réserve affirme :

   « Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ». La direction a-t-elle raison ? Justifier.