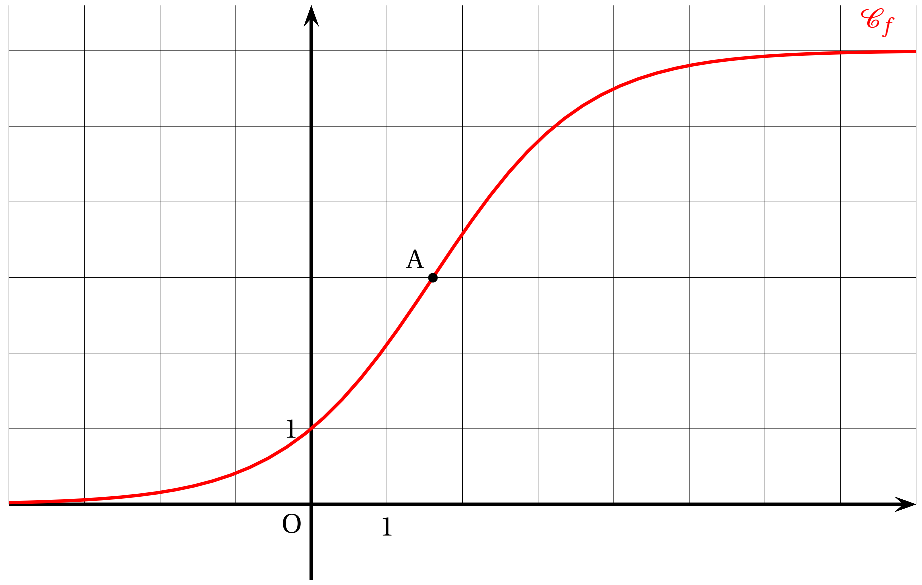
Exercice 3 **5 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5\ ;\ 3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
3. **a.** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

   b. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que :
   - f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;
   - pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-x}(5\,\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^3}.$$

   a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

   b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ \ln 5]$, on a : $f(x) \geqslant \frac{5}{6}x + 1$.
5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k\ln(\mathrm{e}^{x}+5)$, où k est une constante réelle.

   a. Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$.
3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

   On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

   On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h.

   a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

   b. Pour tout réel positif m, on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6m\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

   Montrer que pour tout réel positif m, la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.