

EXERCICE 3**5 points**

On considère l'équation différentielle

$$(E_0) : y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) .

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = y - \cos(x) - 3 \sin(x)$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

3. La fonction h est définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2 \cos(x) + \sin(x)$.

On admet qu'elle est dérivable sur \mathbb{R} .Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) .

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».

5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .

6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^{-x} + \sin(x) + 2 \cos(x)] dx.$$