

EXERCICE 4

5 points

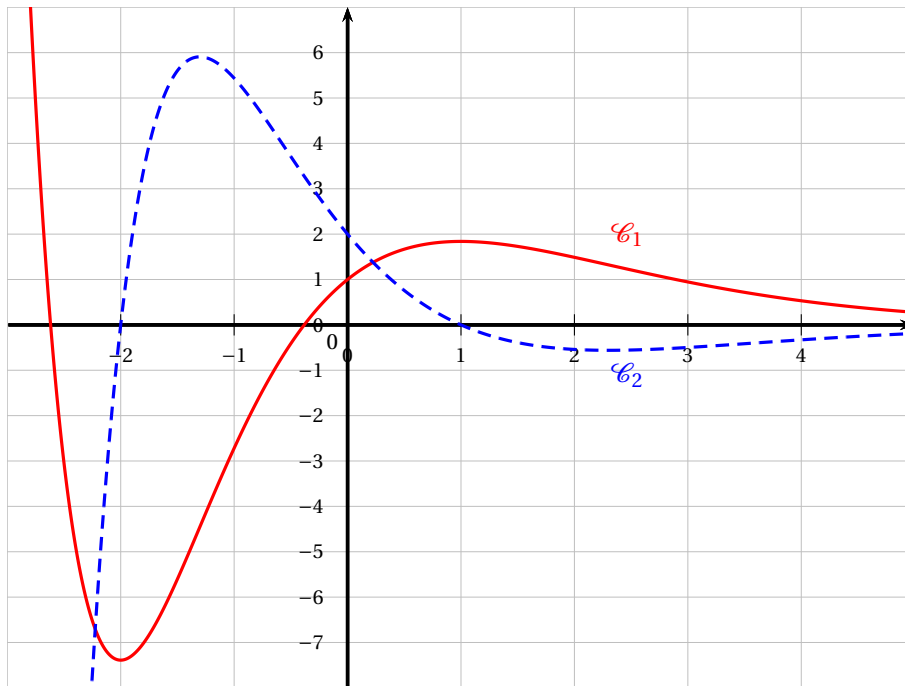
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} . L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g' .

On précise également que :

- La courbe \mathcal{C}_1 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 1)$.
- La courbe \mathcal{C}_2 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2 ; 0)$ et $(1 ; 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y' = (2x + 3)e^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x .

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) .
4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E) .

Déterminer alors l'expression de la fonction g .

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2) e^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . On note f' la fonction dérivée de f sur \mathbb{R} .
 - a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1) e^{-x}$.
 - b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur \mathbb{R} puis en déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. On notera \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7) e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .
Soit α un nombre réel positif.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.