

Exercice 1

5 points

PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E): y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = ax e^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. On considère l'équation différentielle

$$(E'): y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') .

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0; +\infty[$. De plus, on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1. a. Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction f . On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
 - a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[14; 15]$.
 - b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage Python :

a	14				
b	15				
$b - a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```
from math import exp
def f(x):
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation():
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1:
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8:
            a = m
        else:
            b = m
    return a,b
```

- c. Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question?