

Exercice 3

5 points

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \quad \text{et, pour } n \geq 1, f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n , on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1. a. On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$f'_n(x) = (n - x)x^{n-1} e^{-x}.$$

- b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	0

2. Justifier par le calcul que le point $A(1 ; e^{-1})$ appartient à la courbe \mathcal{C}_n .

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ pour $n \geq 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Sur le graphique en ANNEXE, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}$ et \mathcal{C}_{100} .
- Donner une interprétation graphique de I_n .
 - Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
2. Calculer I_0 .
3. a. Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ .
5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}.$$

6.
 - a. Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
 - b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.
On a importé la constante `e`.

```
def mystere(n):  
    I = 1 - 1/e  
    L = [I]  
    for i in range(n):  
        I = (i + 1)*I - 1/e  
        L.append(I)  
    return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice?