Exercice 1 **5 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 0{,}4y = \mathrm{e}^{-0{,}4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = t\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.
Vérifier que u est solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.
Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0{,}4y = 0$.

a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

On admettra que la réciproque est vraie.

b. Résoudre l'équation différentielle (H).

c. En déduire les solutions de (E).

d. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en $\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, en fonction du temps t, exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}.$$

1. **a.** Montrer que, pour tout $t \in [0\,;\,6]$, $f'(t) = (-0{,}4t + 0{,}6)\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.

b. Étudier les variations de f sur $[0\,;6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0{,}7\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

a. Démontrer que sur l'intervalle $[0\,;6]$ l'équation $f(t) = 0{,}7$ admet une unique solution que l'on notera α.

b. Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie ?
On exprimera ce temps à la minute près.

3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en $\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = -23{,}75\,\mathrm{e}^{-2{,}4} + 8{,}75.$$

b. Calculer la glycémie moyenne en $\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

c. En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.