

Exercice 2

5 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (**Figure 2**).

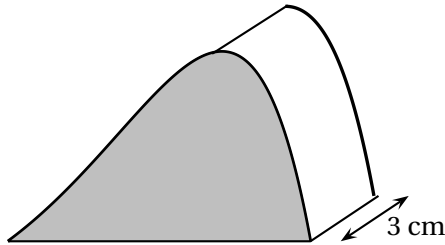


Figure 1

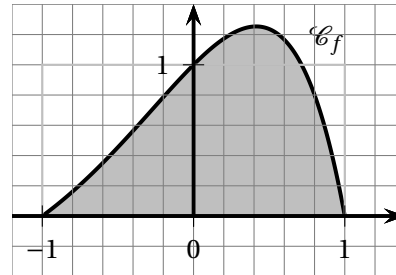


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = (1 - x^2) e^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1.
 - a. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$ on a $f(x) \geq 0$.
 - b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x e^{-x} dx.$$

2. Le volume \mathcal{V} de chocolat, en cm^3 , nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2 , de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume \mathcal{V} , arrondi à $0,1 \text{ cm}^3$ près, est égal à $4,4 \text{ cm}^3$.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01 ; +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2 [2 - 3 \ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01 ; +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1.
 - a. Déterminer $\lim_{q \rightarrow +\infty} B(q)$.
 - b. Montrer que, pour tout $q \geq 0,01$, $B'(q) = 8q(1 - 6 \ln(q))$.
 - c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01 ; +\infty[$.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction B .
 - d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan?
2.
 - a. Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2 ; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.
 - b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01 ; 1,2[$.
On donne $\alpha \approx 0,757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.