

**EXERCICE 4**

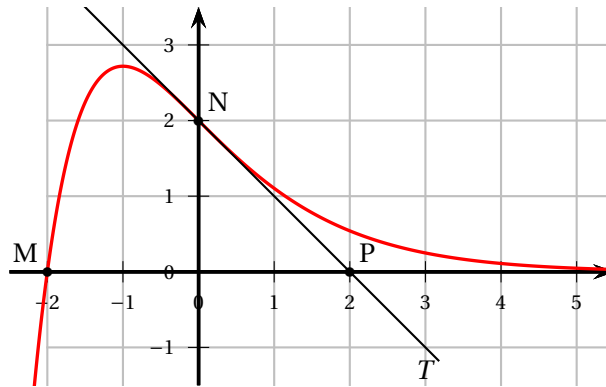
**6 points**

Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  ;
- la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  en son point  $N(0; 2)$  ;
- le point  $M(-2; 0)$  appartenant à  $\mathcal{C}_f$  et  $P(2; 0)$  appartenant à la tangente  $T$ .

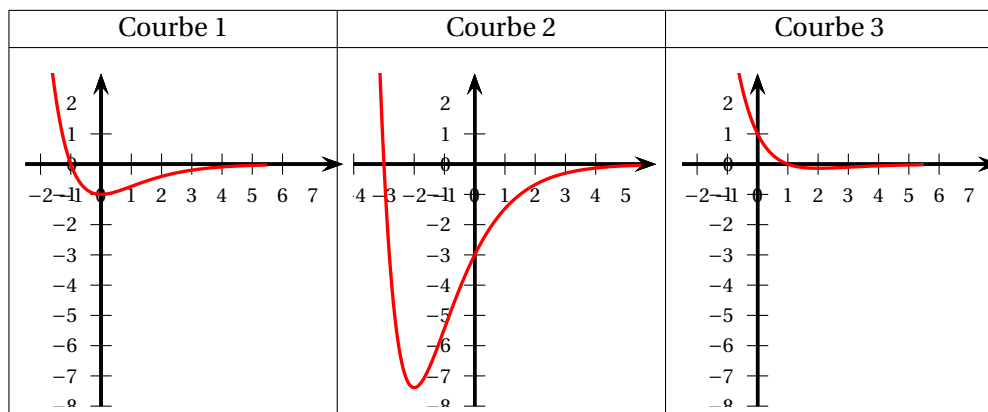
On précise que la fonction  $f$  est strictement positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle  $]-\infty; -1]$ .



**Partie A : étude graphique**

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

- Donner  $f(0)$ .
  - Déterminer  $f'(0)$ .
- Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
- La fonction  $f$  est-elle convexe sur  $\mathbb{R}$ ? Justifier.
- Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Justifier.



**Partie B : recherche d'une expression algébrique**

On admet que la fonction  $f$  est de la forme

$$f(x) = (ax + b)e^{\lambda x},$$

où  $a, b$  et  $\lambda$  sont des constantes réelles.

Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que  $b = 2$ .
2. Justifier que  $-2a + b = 0$  puis en déduire la valeur de  $a$ .
3. Déterminer une expression algébrique de  $f$ . Justifier.

### Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
2. On admet que  $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$ . Dresser le tableau de variations complet de  $f$ . Justifier.
3.
  - a. Étudier la convexité de  $f$ .
  - b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
4. Pour tout nombre réel  $t \geq 0$ , on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^t f(x) dx.$$

- a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t - 3)e^{-t} + e^2.$$

- b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.