

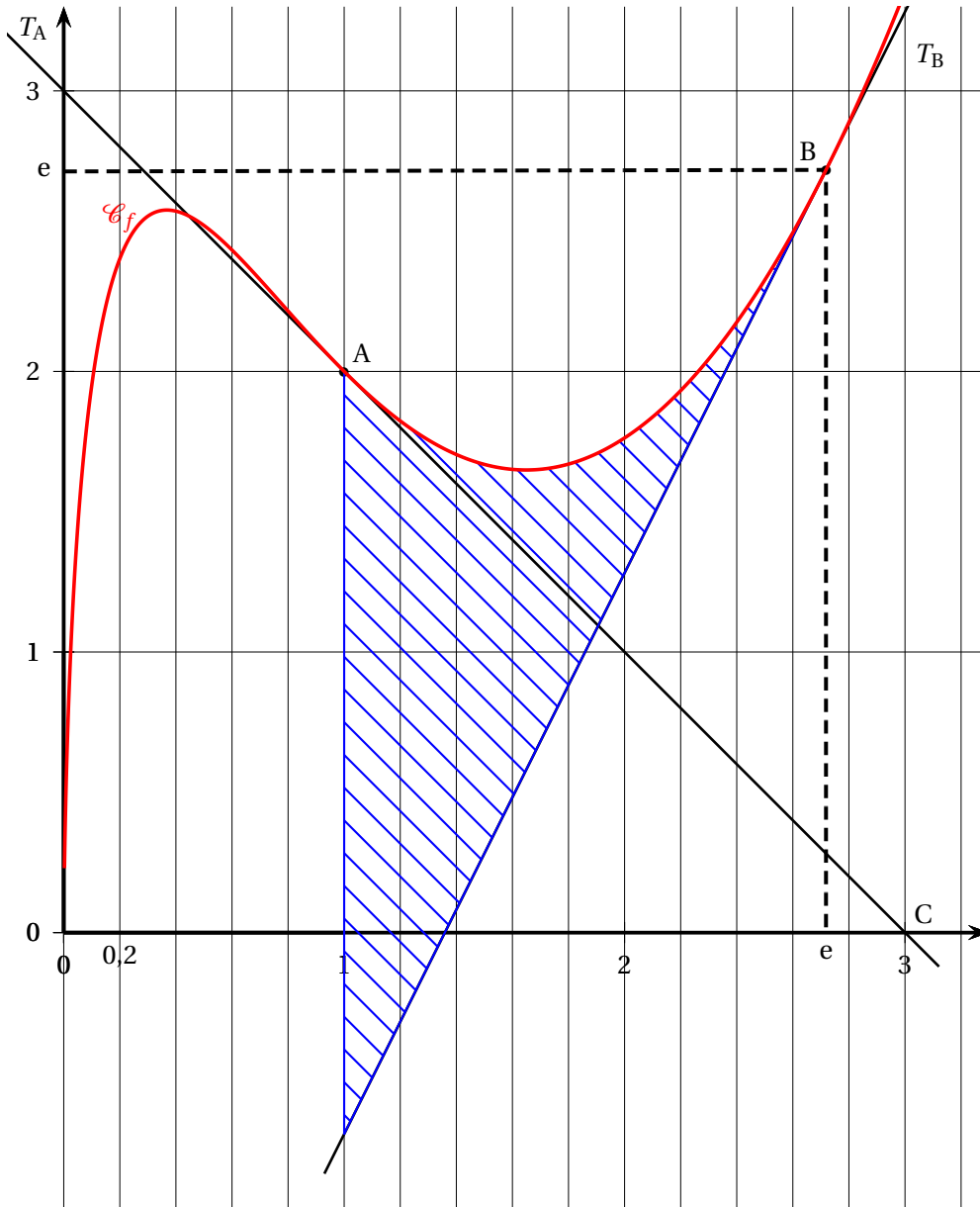
EXERCICE 2**6 points**

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée \mathcal{C}_f sur l'intervalle $]0 ; 3]$;
- la droite T_A , tangente à \mathcal{C}_f au point $A(1 ; 2)$;
- la droite T_B tangente à \mathcal{C}_f au point $B(e ; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3 ; 0)$.

**Partie A : Lectures graphiques**

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que \mathcal{C}_f ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
 - a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
 - c. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

3. On note \mathcal{A} l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe \mathcal{C}_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

On admet que $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx = \frac{e^2 - 1}{4}$.

En déduire la valeur exacte de \mathcal{A} en unité d'aire.