

EXERCICE 4

6 points

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$, où \ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.
 - a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.
 - c. Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - d. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.
2.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.
 - b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g .

La fonction g est définie sur $]0 ; 1]$ par : $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0 ; 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
2.
 - a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0 ; \frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
 - b. On admet le tableau de signes suivant :

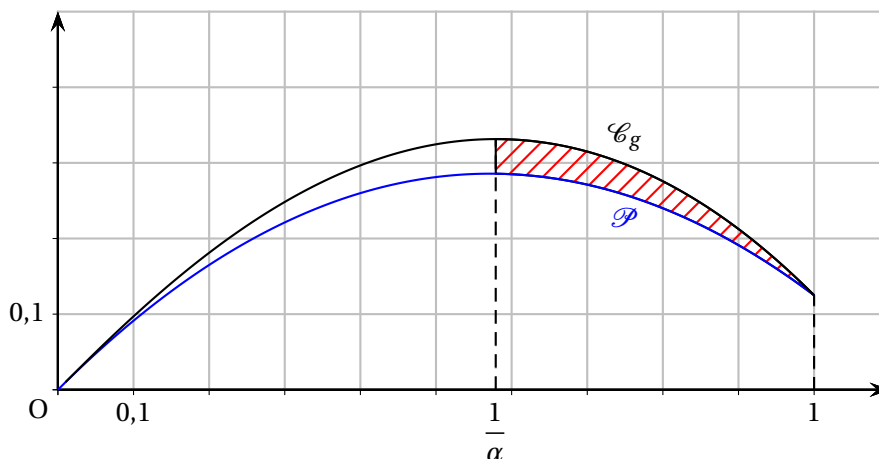
x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0
		-	

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0 ; 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe \mathcal{C}_g de la fonction g ;
- La parabole \mathcal{P} d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.



On souhaite calculer l'aire \mathcal{A} du domaine hachuré compris entre les courbes \mathcal{C}_g et \mathcal{P} , et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1.
 - a. Justifier la position relative des courbes \mathcal{C}_g et \mathcal{P} sur l'intervalle $]0 ; 1]$.
 - b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire \mathcal{A} .