

Exercice 2

6 points

Partie A

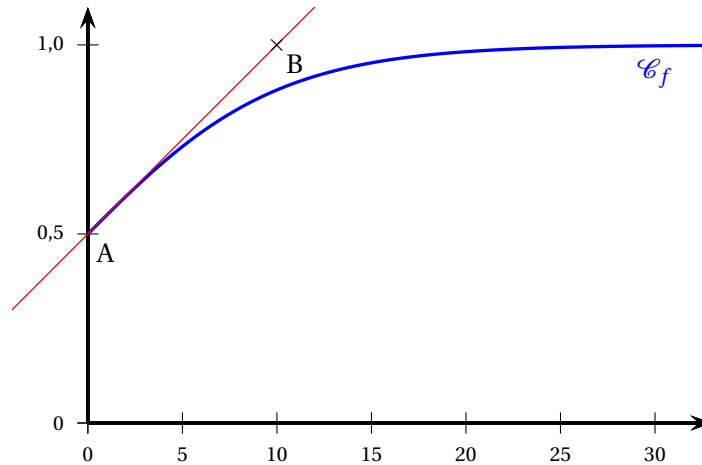
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La fonction f admet pour représentation graphique la courbe \mathcal{C}_f ci-dessous :



On considère les points $A(0 ; 0,5)$ et $B(10 ; 1)$.

On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A .

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) .
5.
 - a. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b .
 - b. En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2t}} dt.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.