

## Exercice 4

6 points

### Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre  $-30$  et  $30$ ; cet ensemble peut s'écrire ainsi :  $\{-30; -29; -28; \dots -1; 1; \dots; 28; 29; 30\}$ . Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif  $a$  puis un entier relatif  $c$ .

1. Combien de couples  $(a; c)$  différents peut-on ainsi obtenir?

On considère l'évènement  $M$  : « l'équation  $ax^2 + 2x + c = 0$  possède deux solutions réelles distinctes », où  $a$  et  $c$  sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2. Montrer que l'évènement  $M$  a lieu si et seulement si  $ac < 1$ .
3. Expliquer pourquoi l'évènement contraire  $\overline{M}$  comporte 1 740 issues.
4. Quelle est la probabilité de l'évènement  $M$ ? On arrondira le résultat à  $10^{-2}$ .

### Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8) e^{-5x+1} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

où  $y$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y' + 10y = 0$ .
2. Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}.$$

On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

Justifier que  $f$  est une solution particulière de  $(E)$ .

3. Donner l'expression de toutes les solutions de  $(E)$ .

### Partie C : étude de fonction

On propose d'étudier dans cette partie la fonction  $f$  rencontrée à la partie B question 2.

On rappelle que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ . On appelle  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère du plan.

1. On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  
Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$
2. En utilisant la partie A, montrer que  $\mathcal{C}_f$  coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonnées de ces points ne sont pas attendues).
3. En utilisant les parties A et B, montrer que  $\mathcal{C}_f$  possède deux tangentes horizontales.
4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction  $f$ .
5. Déterminer en justifiant le nombre de solution(s) de l'équation  $f(x) = 1$ .
6. Pour tout réel  $m$  strictement supérieur à 0,2, on définit  $I_m$  par  $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx$ .

- a.** Vérifier que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F(x) = \left( -\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125} \right) e^{-5x+1}$$

est une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- b.** Existe-t-il une valeur de  $m$  pour laquelle  $I_m = 0$ ?  
Interpréter graphiquement ce résultat.