

EXERCICE 4**5 points**

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$,

$$f'(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)].$$

- b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

- b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

- c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

