

Exercice 3

5 points

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x^2 - 4) e^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x , $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4) e^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$.

1. Justifier que $I_0 = e^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2 .

Partie 3

1. Déterminer le signe sur \mathbb{R} de la fonction f définie dans la partie 1.

2. On a représenté ci-contre la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D .

