

**EXERCICE 3****5 points**

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le point  $A(1; 1; 0)$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation :  $x + 4y + 2z + 1 = 0$ .

1. On note  $(d)$  la droite passant par  $A$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}$ .  
Déterminer une représentation paramétrique de  $(d)$ .
2. Justifier que la droite  $(d)$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont sécants en un point  $B$  dont les coordonnées sont  $(1; -1; 1)$ .
3. On considère le point  $(1; -1; -1)$ .
  - a. Vérifier que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent bien un plan.
  - b. Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .
  - c. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
4. a. Justifier que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ .  
b. Soit  $H$  le milieu du segment  $[BC]$ .  
Calculer la longueur  $AH$  puis l'aire du triangle  $ABC$ .
5. Soit  $D$  le point de coordonnées  $(0; -1; 1)$ .
  - a. Montrer que la droite  $(BD)$  est une hauteur de la pyramide  $ABCD$ .
  - b. Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide  $ABCD$ .

On rappelle que le volume  $V$  d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h,$$

où  $\mathcal{B}$  est l'aire d'une base et  $h$  la hauteur correspondante.