

EXERCICE 3**5 points**

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le point $A(1; 1; 0)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On considère le plan \mathcal{P} d'équation : $x + 4y + 2z + 1 = 0$.

1. On note (d) la droite passant par A et dirigée par le vecteur \vec{u} .
Déterminer une représentation paramétrique de (d) .
2. Justifier que la droite (d) et le plan \mathcal{P} sont sécants en un point B dont les coordonnées sont $(1; -1; 1)$.
3. On considère le point $(1; -1; -1)$.
 - a. Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
 - b. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4.
 - a. Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.
 - b. Soit H le milieu du segment [BC].
Calculer la longueur AH puis l'aire du triangle ABC.
5. Soit D le point de coordonnées $(0; -1; 1)$.
 - a. Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.
 - b. Dédire des questions précédentes le volume de la pyramide ABCD.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h,$$

où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.