

## EXERCICE 4 (7 points)

**Principaux domaines abordés :**

Géométrie dans l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(0 ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(5 ; 0 ; -1)$ ,  $B(1 ; 4 ; -1)$ ,  $C(1 ; 0 ; 3)$ ,  $D(5 ; 4 ; 3)$  et  $E(10 ; 9 ; 8)$ .

1. a. Soit  $R$  le milieu du segment  $[AB]$ .

Calculer les coordonnées du point  $R$  ainsi que les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

- b. Soit  $\mathcal{P}_1$  le plan passant par le point  $R$  et dont  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur normal.

Démontrer qu'une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}_1$  est :

$$x - y - 1 = 0 .$$

- c. Démontrer que le point  $E$  appartient au plan  $\mathcal{P}_1$  et que  $EA = EB$  .

2. On considère le plan  $\mathcal{P}_2$  d'équation cartésienne  $x - z - 2 = 0$  .

- a. Justifier que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants.

- b. On note  $\Delta$  la droite d'intersection de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  .

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

3. On considère le plan  $\mathcal{P}_3$  d'équation cartésienne  $y + z - 3 = 0$  .

Justifier que la droite  $\Delta$  est sécante au plan  $\mathcal{P}_3$  en un point  $\Omega$  dont on déterminera les coordonnées.

Si  $S$  et  $T$  sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $MS = MT$  est un plan, appelé plan médiateur du segment  $[ST]$ . On admet que les plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  sont les plans médiateurs respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[AD]$ .

4. a. Justifier que  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ .

- b. En déduire que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.