

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Géométrie dans l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(5; 0; -1)$, $B(1; 4; -1)$, $C(1; 0; 3)$, $D(5; 4; 3)$ et $E(10; 9; 8)$.

1. a. Soit R le milieu du segment $[AB]$.

Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .

- b. Soit \mathcal{P}_1 le plan passant par le point R et dont \overrightarrow{AB} est un vecteur normal.

Démontrer qu'une équation cartésienne du plan \mathcal{P}_1 est :

$$x - y - 1 = 0 .$$

- c. Démontrer que le point E appartient au plan \mathcal{P}_1 et que $EA = EB$.

2. On considère le plan \mathcal{P}_2 d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

- a. Justifier que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.

- b. On note Δ la droite d'intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

3. On considère le plan \mathcal{P}_3 d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.

Justifier que la droite Δ est sécante au plan \mathcal{P}_3 en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment $[ST]$.
On admet que les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et \mathcal{P}_3 sont les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

4. a. Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

- b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.