

Exercice 2 (7 points)

Thème : Géométrie dans l'espace

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2; 0; 3), B(0; 2; 1), C(-1; -1; 2) \text{ et } D(3; -3; -1).$$

1- Calcul d'un angle.

- Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- Calculer les longueurs AB et AC .
- À l'aide du produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle \widehat{BAC} puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle \widehat{BAC} au dixième de degré.

2- Calcul d'une aire.

- Déterminer une équation du plan P passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB) .
- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB) , c'est-à-dire du point d'intersection entre la droite (AB) et le plan P .
- Calculer l'aire du triangle ABC .

3- Calcul d'un volume.

- Soit le point $F(1; -1; 3)$. Montrer que les points A , B , C et F sont coplanaires.
- Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC) .
- Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.