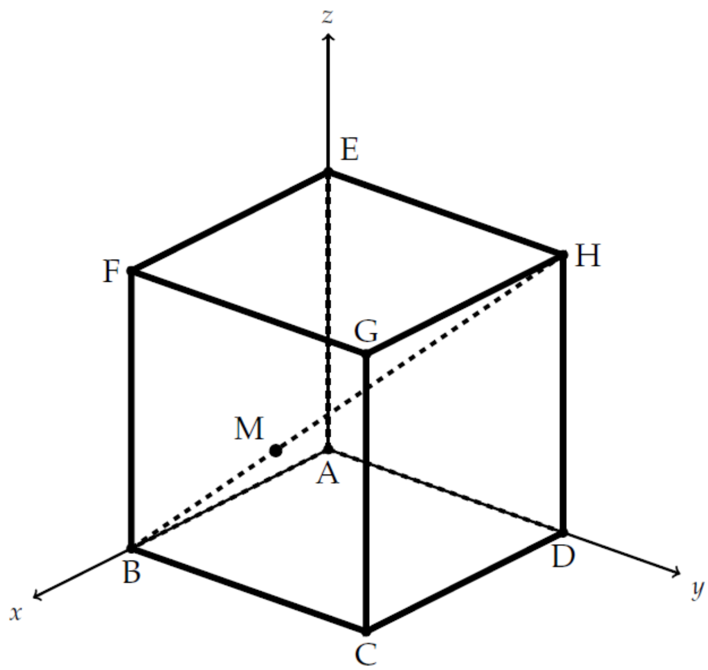
## EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BH}$.




**1.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

**2.**

- **a.** Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.
- **b.** On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté $c$ est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

  Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**3.** Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

**4.**

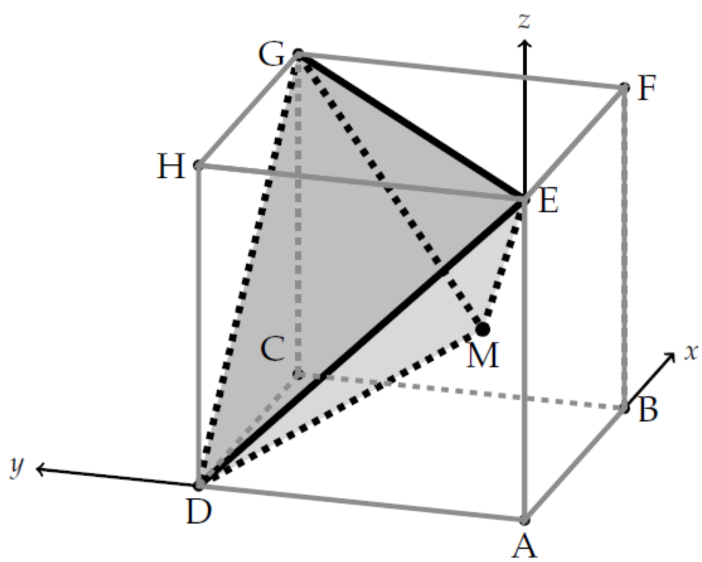
- **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\,;1\,;1)$ est normal au plan (EGD).
- **b.** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

**c.** Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t\,, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}$$

**5.** Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :




Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

**a.** Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

**b.** En déduire le volume de la pyramide GEDM.

*On rappelle que le volume $V$ d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{b \times h}{3}$ où $b$ désigne l'aire d'une base et $h$ la hauteur associée.*