EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer le choix, les principaux domaines abordés sont indiqués en début de chaque exercice.

Exercice A

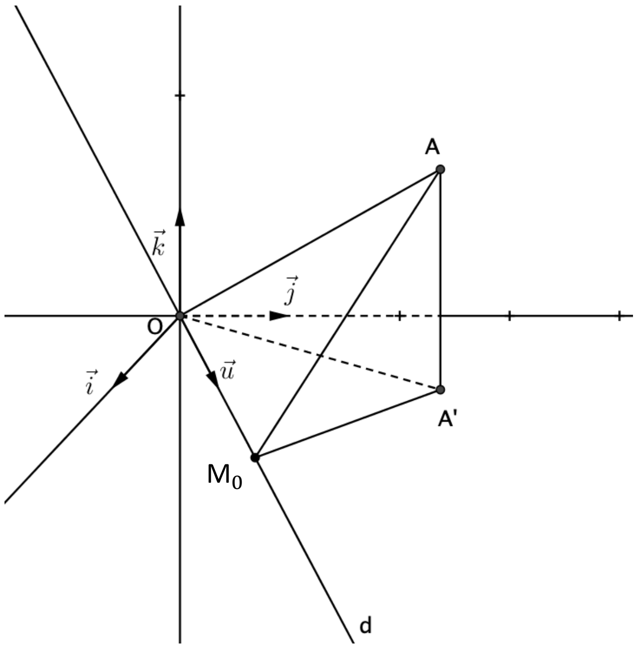
Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace.

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t ; t ; 0)$.

a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$\text{AM}^2 = 2t^2 - 8t + 14 .$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2 ; 2 ; 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1 ; 3 ; 0)$.
Démontrer que le point M_0 est le point du plan (AA'M_0) le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $\text{OM}_0\text{A'A}$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.