

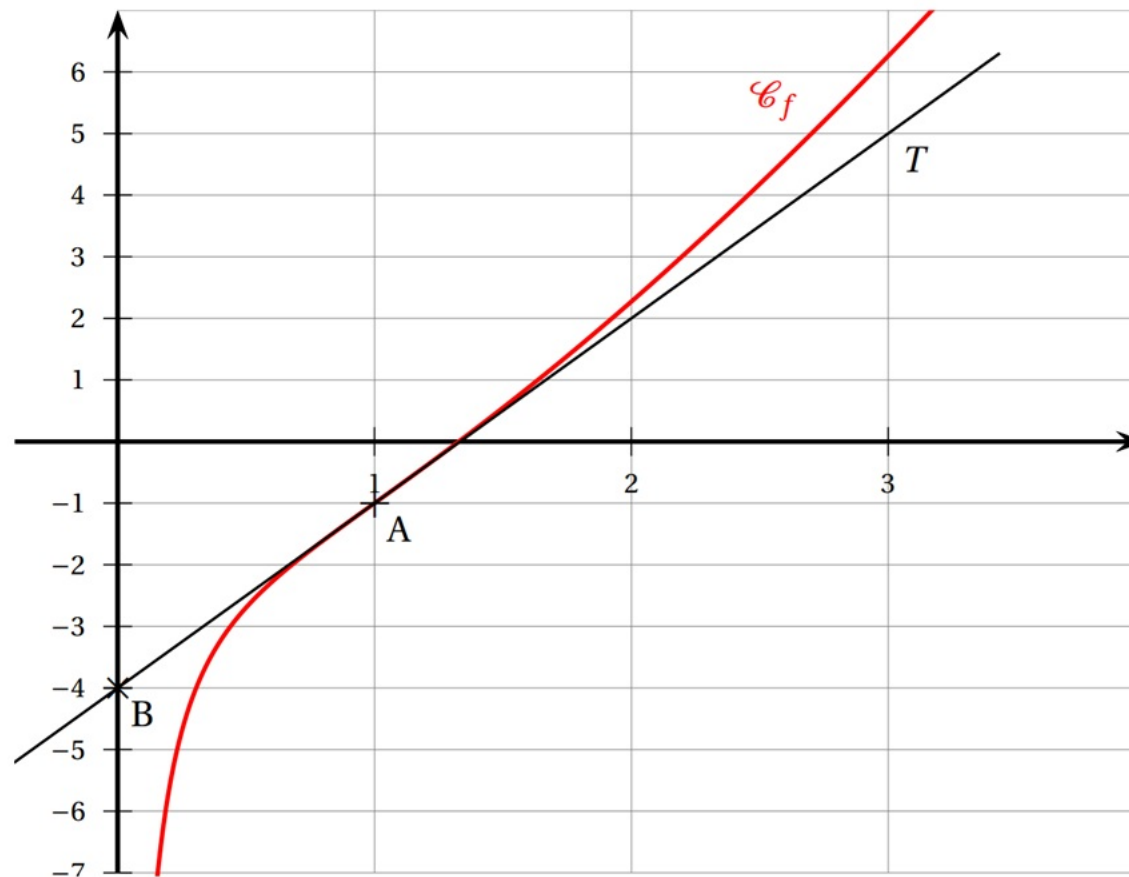
Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative ($\mathcal{C}_f$) de la fonction f , ainsi que la droite (T), tangente à la courbe ($\mathcal{C}_f$) au point A de coordonnées (1 ; -1).

Cette tangente passe également par le point B(0 ; -4).



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
Que semble représenter le point A pour la courbe ($\mathcal{C}_f$) ?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

3.
 - a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - b. Étudier les variations de la fonction f' , puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
4.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$