



Les entiers

Fiche méthode : Multiples – Nombres premiers

Utiliser les notions de multiple et de diviseur...



Pour montrer que le nombre a est un multiple de b (ou que b est un diviseur de a), il suffit d'écrire a comme le produit de b avec un entier. Souvent il faut mettre b en facteur.

Exemple : Soit x un entier relatif, montrer que $A=(2x+6)^2$ est un multiple de 4.

$$A = 4x^2 + 24x + 36 = 4(x^2 + 6x + 9) = 4k \text{ où } k = x^2 + 6x + 9 \text{ est comme sommes et produits d'entiers.}$$

Donc $A = 4k$ avec k un entier, A est bien un multiple de 4.



Pour trouver des multiples de a compris entre m et n , il suffit de chercher les entiers k , vérifiant l'encadrement $m < ka < n$.

Exemple : Donner les multiples de 7 compris entre 100 et 120.

$$\text{Cherchons les entiers } k \text{ tels que } 100 < 7k < 120 \Rightarrow 100/7 < k < 120/7 \Rightarrow 14 < 14,29 < k < 17,14 < 18$$

Les multiples sont donc $15 \times 7 = 105$, $16 \times 7 = 112$ et $17 \times 7 = 119$.

Utiliser la notion de pair ou impair ...



Pour montrer que l'entier relatif a est pair (resp. impair), il suffit de l'écrire sous la forme $2k$ (resp. $2k+1$) où k est un entier relatif.

1^{re} méthode : directement par le calcul

Exemple : Soit x un entier relatif, montrer que $A=4x+3$ est impair.

$$4x+3 = 4x + 2 + 1 = 2(2x+1) + 1 = 2k + 1 \text{ où } k=2x+1 \text{ qui est un entier comme produit et somme d'entiers}$$

Donc $4x+3 = 2k + 1$ avec k entier, on en déduit que A est impair.

2^{ème} méthode : disjonction des cas

Exemple : Soit n un entier relatif, montrer que $B=n(n+1)$ est pair.

Si n est pair, alors $n=2k$ avec k entier, $A=2k(2k+1) = 2K$ avec $K=k(2k+1)$ qui est entier, donc A est pair.

Si n est impair, alors $n=2l+1$ avec l entier, $A=(2l+1)(2l+2) = 2(2l+1)(l+1) = 2L$ avec $L=(2l+1)(l+1)$ qui est entier, donc A est pair.

Que n soit pair ou impair, donc dans tous les cas, A est pair.

3^{ème} méthode : la contraposée

Exemple : Soit n un entier naturel, si n^2+5 est impair, alors n est pair.

Nous allons démontrer la contraposée : « si n est impair, alors n^2+5 est pair »

$$\text{Si } n \text{ est impair, alors } n=2k+1 \text{ avec } k \text{ entier, } n^2+5=(2k+1)^2+5=4k^2+4k+6=2(2k^2+2k+3)=2K \text{ où } K=2k^2+2k+3.$$

K est donc un entier comme produits et sommes d'entiers. On en déduit que n^2+5 est pair.

Utiliser la notion de nombre premier ...



Pour montrer qu'un entier naturel n est premier, il suffit de montrer qu'il n'a aucun diviseur premier entre 2 et $\sqrt{n}$.

Exemple : Montrer que 101 est premier.

$$\sqrt{101} \approx 10,05. \text{ Il suffit de tester 2, 3, 5 et 7, aucun ne divise 101 donc il est premier.}$$

Remarque : Si on ne connaît pas les nombres premiers, on teste tous les entiers entre 2 et $\sqrt{101}$.



Pour simplifier une fraction, il suffit d'utiliser les décompositions en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur, puis de simplifier.

Exemple : Simplifier la fraction $\frac{36}{90}$.

$$\frac{36}{90} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{6}{15}$$