Equation cartésienne d'un plan

Fiche méthode

Comment vérifier qu'un vecteur est normal à un plan ?

Pour vérifier qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à **DEUX** vecteurs non colinéaires de ce plan

Exemple : Pour montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC) où A, B et C sont trois points non alignés, on vérifie que $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Comment trouver une équation cartésienne d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal ?

Si on connait un point A du plan P et $\vec{n}$ un vecteur normal de P, pour trouver une équation de P, on considère le point M(x;y;z) de P et on utilise la propriété : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}$=0

Exemple : Quelle est l'équation du plan passant par A(1;2;3) et de vecteur normal $\vec{n}$(4;5;6) ?
Soit M(*x;y;z*) un point de ce plan, on a : $\overrightarrow{AM}$(*x-1;y-2;z-3*)
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 4(x-1) + 5(y-2) + 6(z-3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y + 6z - 32 = 0$
Une équation de P est $4x + 5y + 6z - 32 = 0$

Comment trouver un vecteur normal d'un plan à partir de son équation?

Pour trouver un vecteur normal $\vec{n}$ d'un plan à partir de son équation, il suffit d'appliquer le cours : P a pour équation ax+by+cz+d=0 donc $\vec{n}$(a ; b ; c)

Exemple : Si P a pour équation *2x-z=0* alors un vecteur normal est $\vec{n}$(2 ; 0 ; -1)

Comment trouver l'intersection d'un plan et d'une droite ?

On calcule d'abord le produit scalaire d'un vecteur normal du plan et d'un vecteur directeur de la droite pour vérifier que ils ne sont pas parallèles. Si ce produit est différent de 0, on pourra résoudre un système pour trouver le point d'intersection.

Exemple : Soit la droite (d) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4t \end{cases}$ et le plan P : $2x + y - z = 0$.
$\vec{u}.\vec{n} = 2 \times 1 + 1 \times 1 - 1 \times 4 \neq 0$ donc (d) et P sont sécant et t vérifie : $2(1+t) + (2+t) - 4t = 0 \Rightarrow t = 4$
et donc $x = 1 + 4 = 5$; $y = 2 + 4 = 6$; $z = 4 \times 4 = 16$ Soit A=(5 ; 6 ; 16)

Comment trouver l'intersection de deux plans ?

On regarde d'abord que les plans sont parallèles en vérifiant que leurs vecteurs normaux ne soient pas colinéaires. Si les plans sont sécants, on pourra résoudre le système en introduisant le paramètre t par exemple en posant x=t ou y=t ou z=t pour trouver un système paramétrique de la droite d'intersection

Exemple : Soient P et Q deux plans sécants d'équation : P: $2x + y - 1 = 0$ et Q : $y + z + 2 = 0$
$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}$. On pose *y=t*, doù : $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + t - 1 = 0 \\ t + z + 2 = 0 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = -t - 2 \end{cases}$